



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Propojení matematiky, fyziky a počítačů

Název projektu:
Věda pro život, život pro vědu

Registrační číslo: **CZ.1.07/2.3.00/45.0029**

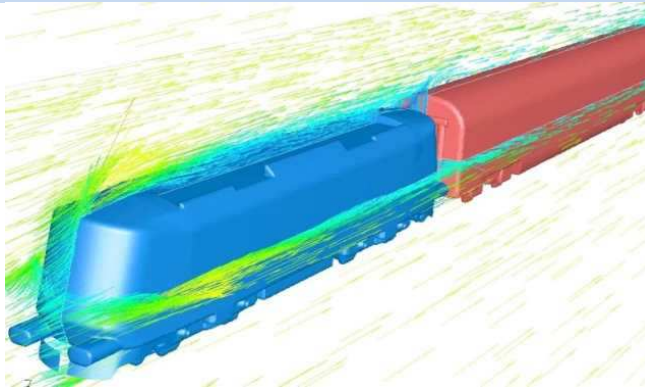


V Ústí n. L., únor 2015

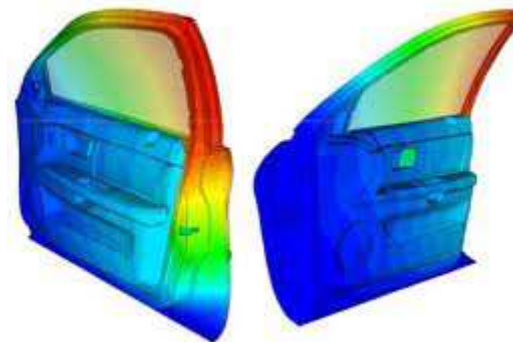
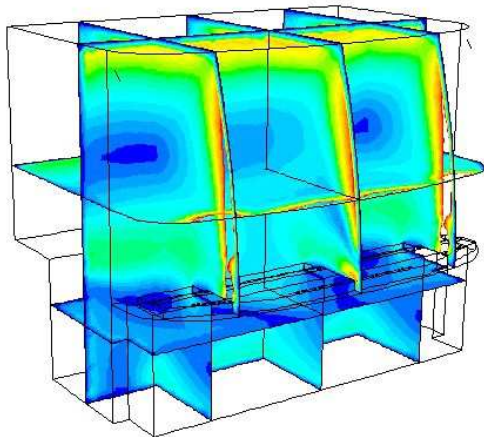
Ing. Radek Honzátka, Ph.D.

Propojení matematiky, fyziky a počítačů

Kde?



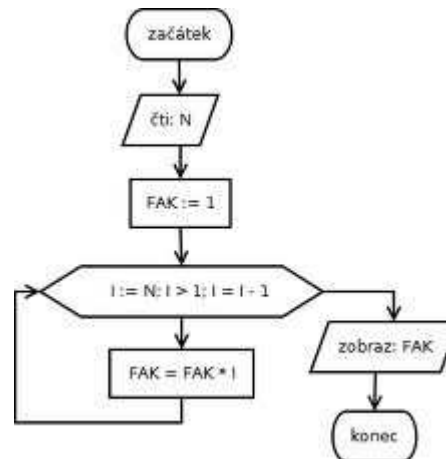
Počítačové simulace



Počítačové simulace

Proč?

- Rozvoj výpočetní techniky – rostoucí výkon, velikost pamětí, klesající cena
- Vývoj nových efektivních algoritmů – zlepšování vypovídací hodnoty výsledků simulačních programů
- CENA – počítačové modelování umožňuje snížení počtu užití experimentálních metod



Počítačové simulace

- Proudění – CFD (Ansys Fluent, Star-CCM+)
- Simulace odlévání (ProCast, Magmasoft)
- Pevnostní a tuhostní výpočty (Ansys, Nastran)
- a další ...

Open  FOAM

The Open Source CFD Toolbox



Oblasti využití

- Průmysl – letecký, automobilový, energetický

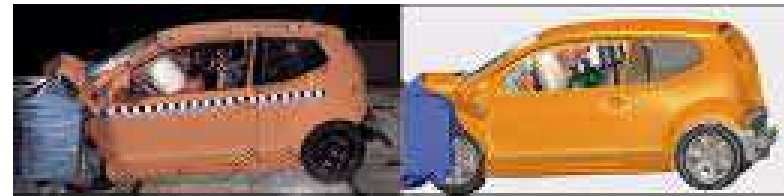


CFD (Computational Fluid Dynamics):

- Aerodynamika: letadla, křídla letadla, automobilu, větrné elektrárny, ...
- Rázové vlny v okolí letounu při transonickém proudění
- Klimatizace/topení v kabině letounu, automobilu

CSD (Computational Structural Dynamics):

- Statická analýza: trupu letadla, nosných ploch, karoserie automobilu ...
- Modální analýza (výpočty vlastních frekvencí a tvarů kmitání konstrukce)
- Dynamické simulace nárazových zkoušek (Crash Simulation)

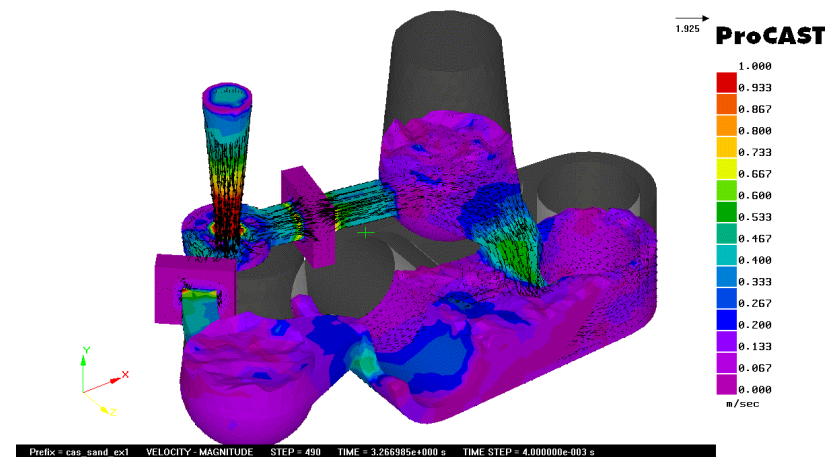
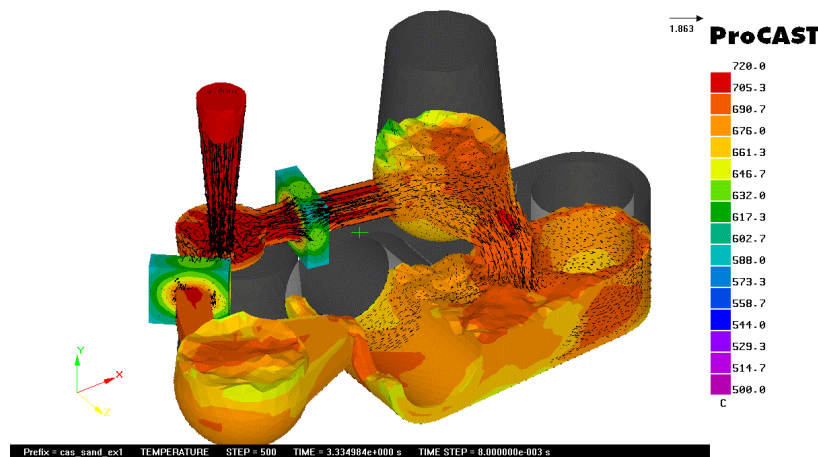


Oblasti využití

- Průmysl – letecký, automobilový, energetický

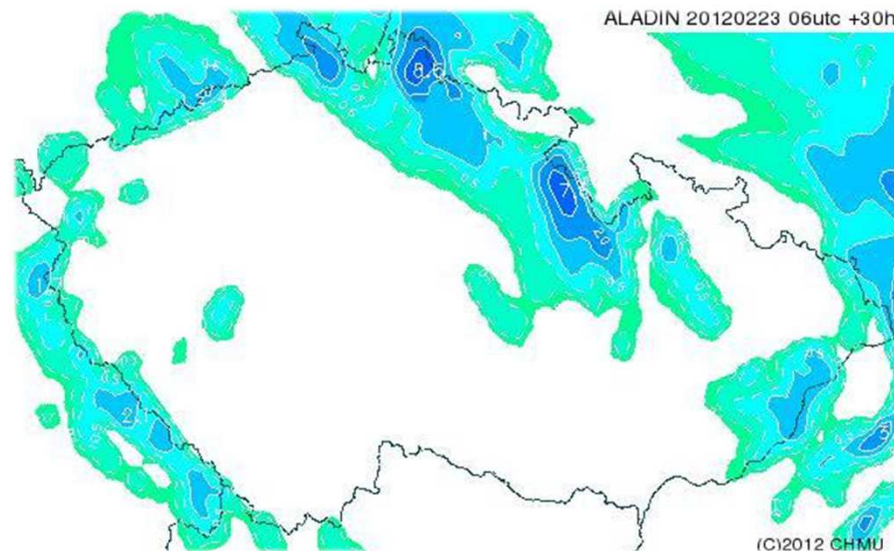
Slévání:

- Prognóza plnění, tuhnutí, vzniku pórovitosti
- Predikce napjatostních stavů v odlitcích, deformace, makrosegregace (rozdíly v chemickém složení mezi částmi odlitku)
- Speciální slévárenské technologie (např. kontinuální odlévání)



Oblasti využití

- Předpověď počasí – i rosničky mluví o numerických modelech
 - ALADIN – počítán v ČR, střední Evropa
 - Propojen s ARPÉGE – F, globální model
 - Německý model DWD LM, skandinávský HIRLAM, polský ULPM



Modely

- Fyzikální model
- Matematický model
- Numerický model

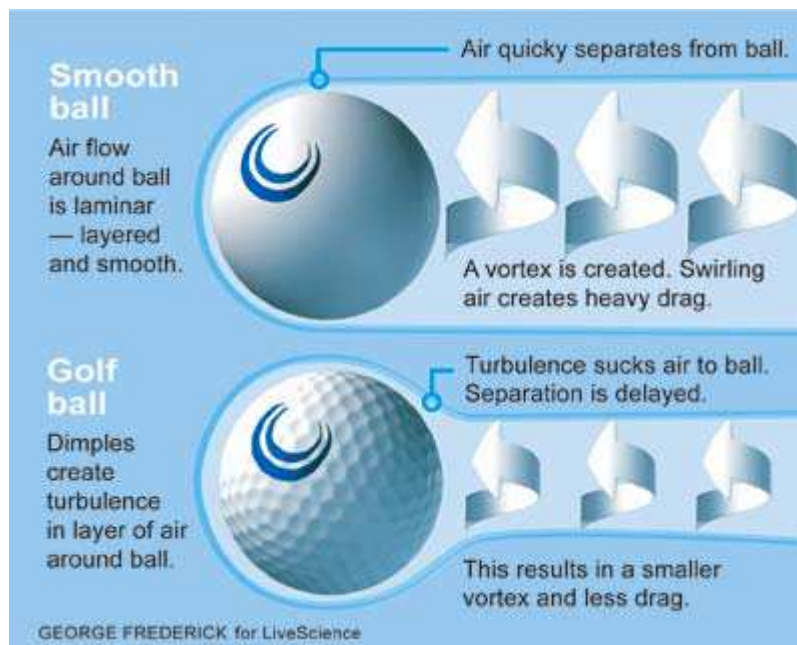


Fyzikální model

- Popis reality
 - O čem víme a co umíme
 - Jak komplexně chceme/potřebujeme
- Např. proudění:
 - Stlačitelné (plyny) X nestlačitelné (kapaliny)
 - Vazké (v realitě vždy) X nevazké (při velkých rychlostech proudění se efekty viskozity projeví pouze v blízkosti stěn těles)
 - Laminární X turbulentní

Fyzikální model

- Golfový míček – turbulentní vs. laminární proudění



V počátcích míčky s hladkým povrchem

Později míčky se strukturou na povrchu

Matematický model

- Analytické řešení – neumíme nalézt, mnohdy se jedná o složitý systém nelineárních parciálních diferenciálních rovnic, proto používáme numerické metody – umožňují převést matematický model na řešení soustav lineárních algebraických rovnic
- Někdy tušíme i jen velmi málo o existenci či jednoznačnosti řešení, aniž bychom jej uměli nalézt

Matematický model

Příklad – stlačitelné nevazké proudění

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Rovnice kontinuity – zákon zachování hmotnosti

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w^2 + p)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Navierovy-Stokesovy rovnice – zákon zachování hybnosti

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(u(E + p))}{\partial x} + \frac{\partial(v(E + p))}{\partial y} + \frac{\partial(w(E + p))}{\partial z} = 0$$

Zákon zachování energie

ρ ...hustota [kg/m³]

p ...tlak [Pa]

E ...totální energie [J]

u, v, w ...složky vektoru rychlosti [m/s]

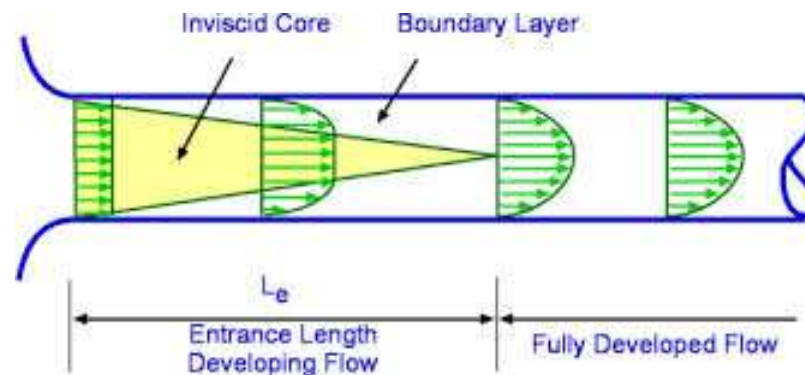
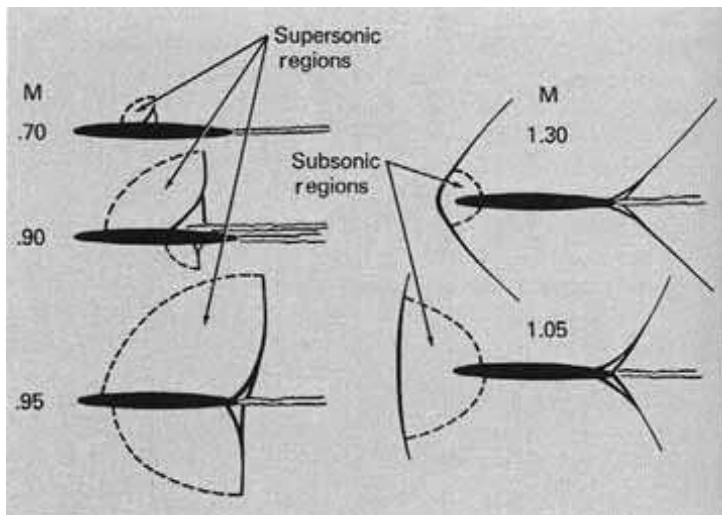
x, y, z ...prostorové souřadnice [m]

Matematický model

Příklad – stlačitelné nevazké proudění

Předpoklady pro uvedený model:

- Ideální plyn \Rightarrow stavová rovnice $p = \rho RT$
- Stlačitelnost – úroveň změny hustoty v proudu
- Nulová viskozita – zjednodušení analýzy bez výrazné ztráty přesnosti v oblastech mimo stěny apod.



Numerický model

- Počítač neví, co to je integrál, derivace apod.
- Počítač „v podstatě umí pouze sčítat, odčítat, násobit a dělit“:
 - Procesor pracuje s daty prostřednictvím instrukcí (kódovaný příkaz pro provedení elementární operace procesoru)
 - Procesor zvládá omezenou množinu „jednoduchých“ (elementárních) instrukcí (instrukční sada procesoru)
 - Složité operace jsou pomocí matematického aparátu rozloženy na jednodušší, tzv. elementární operace, které již procesor zvládne pomocí své instrukční sady zpracovat

Numerické metody

Výpočet e^x na kalkulačce

- S využitím Taylorova vzorce:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Na kalkulačce se tudíž počítá:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}xxx + \dots$$



Numerický model

Numerické metody

- Cílem je převést matematický model na systém lineárních algebraických rovnic
- Tento systém rovnic je následně potřeba vyřešit – přímé metody, iterační metody, algebraický multigrid, metody pro řídké matice, ...
- Velikost systému – řádově 10^3 , ..., 10^6 a více neznámých
- Nutné zvažovat paměťovou náročnost, časovou náročnost, dnes standardní paralelní výpočty

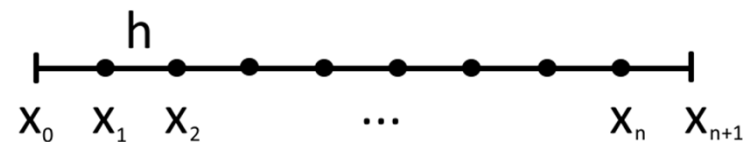
Numerické metody

Laplaceova rovnice 1D na ekvidistantní síti

Matematický model – spojitý:

$$\begin{aligned} & \text{---} () \quad () \quad \text{na} \quad \langle \quad \rangle \\ & () \quad () \quad \text{na} \quad \{ \quad \} \end{aligned}$$

Numerický model - diskrétní:



Diskrétní problém vede na systém lineárních algebraických rovnic
:

$$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Numerické metody

1D příklad z praxe

Rovnice vedení tepla:

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} = 0$$

[] ...teplota

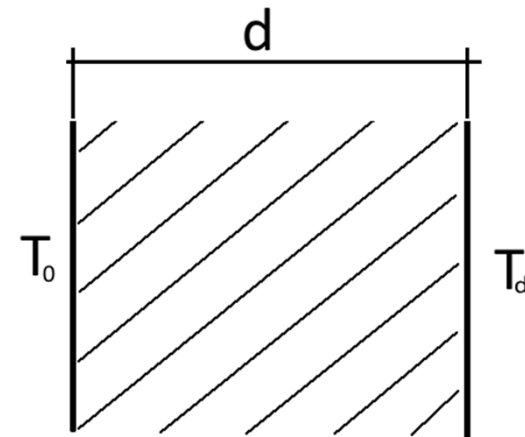
[] — ...koeficient tepelné vodivosti (předpokládáme konst.)

...hustota tepelných zdrojů [—]

Uvažujme stěnu tloušťky d :

Předpokládejme nulové zdroje: ()

Okrajové podmínky: () ()

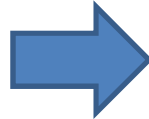


Numerické metody

1D příklad z praxe

Nalezení analytického řešení:

$$\int -k \frac{d^2 T}{dx^2}(x) dx = \int 0 dx$$
$$-k \frac{dT}{dx}(x) = C_1$$



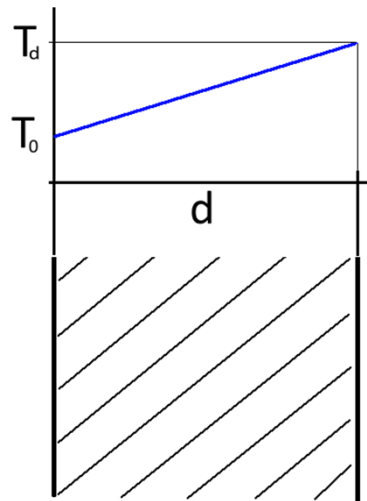
$$\int -k \frac{dT}{dx}(x) dx = \int C_1 dx$$
$$-kT(x) = C_1 x + C_2$$



$$x = 0: -kT_1 = C_1 \cdot 0 + C_2$$
$$x = d: -kT_2 = C_1 d + C_2$$



Analytické řešení: () —



Numerické metody

1D příklad z praxe

Nalezení numerického řešení:

$$\frac{d^2 T}{dx^2}(x) \approx \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2}$$

$$-k \frac{d^2 T}{dx^2}(x) = 0 \rightarrow -k \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$-\frac{k}{h^2}(T_0 - 2T_1 + T_2) = 0$$

$$T_0 - 2T_1 + T_2 = 0 \quad -2T_1 + T_2 = -\tau_0$$

$$-\frac{k}{h^2}(T_1 - 2T_2 + T_3) = 0 \rightarrow T_1 - 2T_2 + T_3 = 0 \rightarrow T_1 - 2T_2 + T_3 = 0$$

$$-\frac{k}{h^2}(T_2 - 2T_3 + T_4) = 0 \quad T_2 - 2T_3 + T_4 = 0 \quad T_2 - 2T_3 = -\tau_d$$

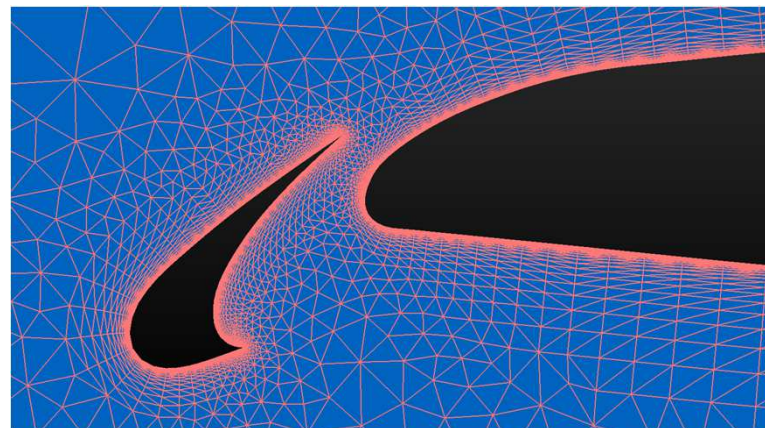
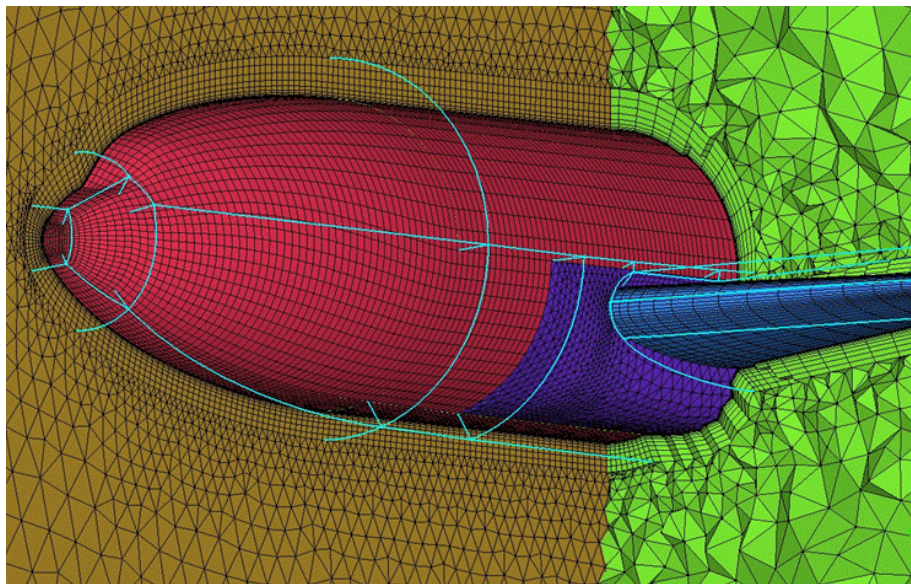
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau_0 \\ 0 \\ -\tau_d \end{pmatrix}$$

Numerické metody

- V průmyslové sféře běžně používané metody:
 - Metoda konečných diferencí – MKD
 - Metoda konečných objemů – MKO (CFD)
 - Metoda konečných prvků – MKP (pevnost, tuhost)
- Metody aplikované v komerčních SW:
 - Ansys – MKP, strukturální výpočty, CFD
 - StarCCM+ – MKO, CFD

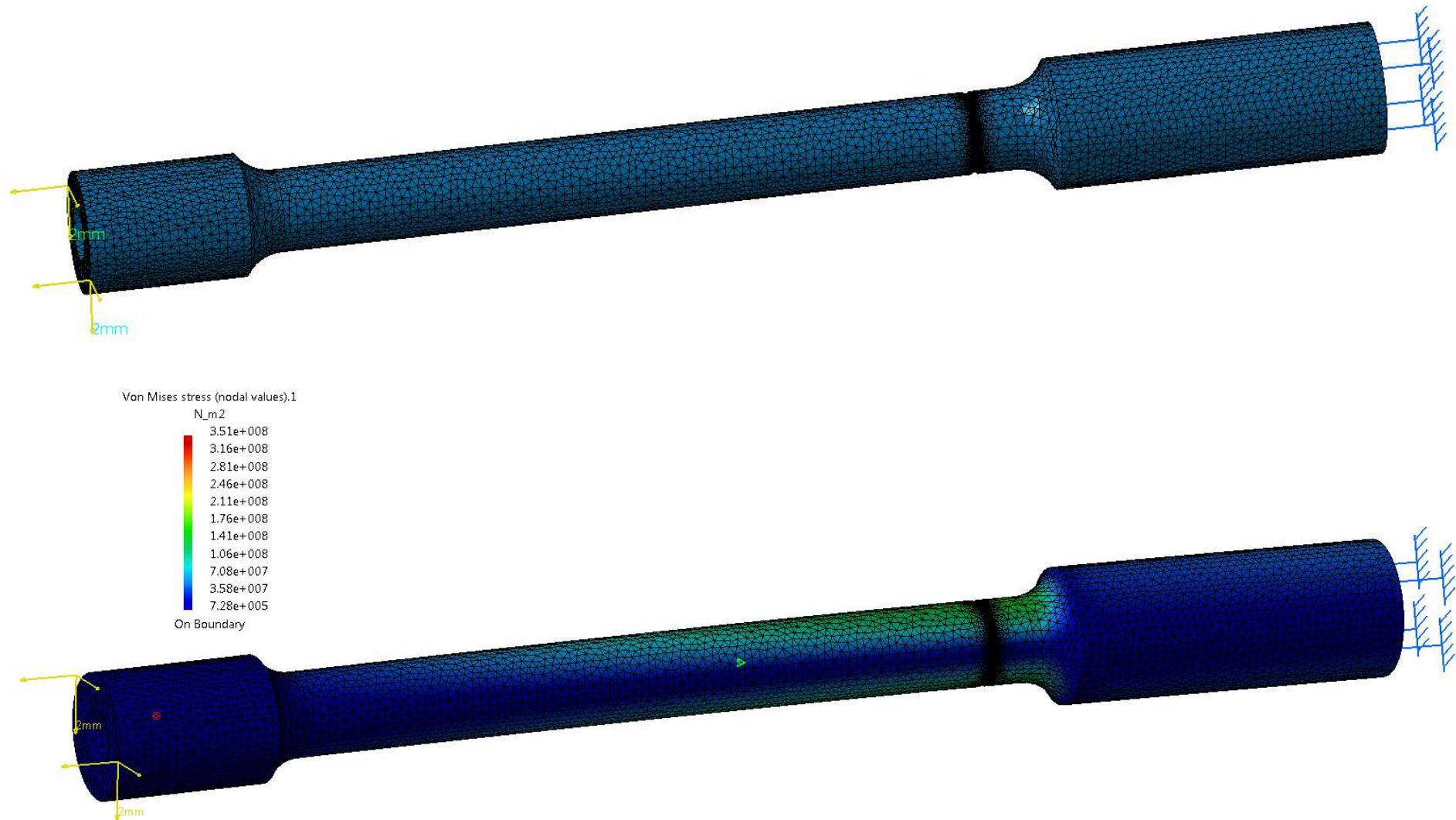
Numerické metody

Aplikace – sítě(CFD)



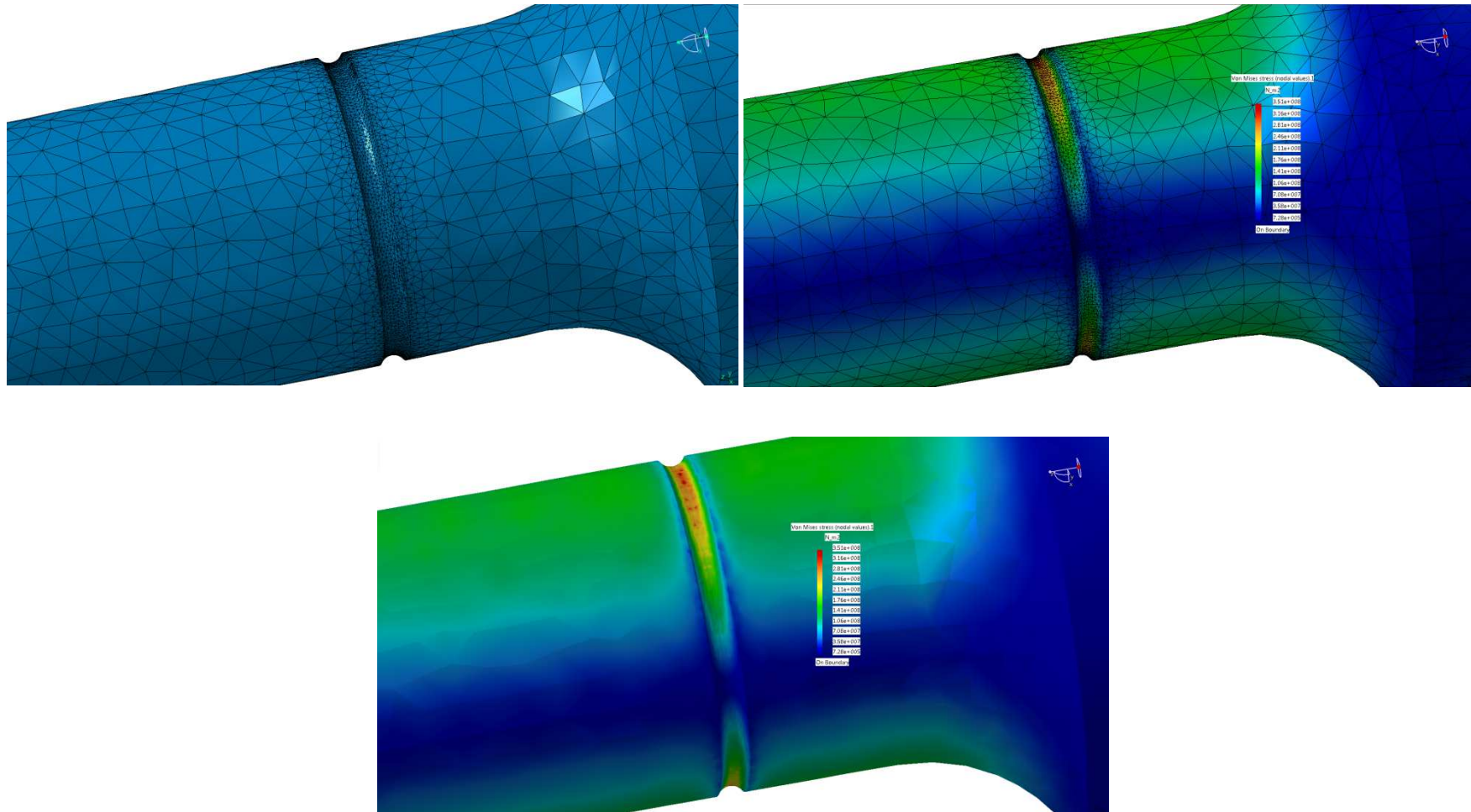
Numerické metody

Aplikace – sítě(pevnostní výpočty)



Numerické metody

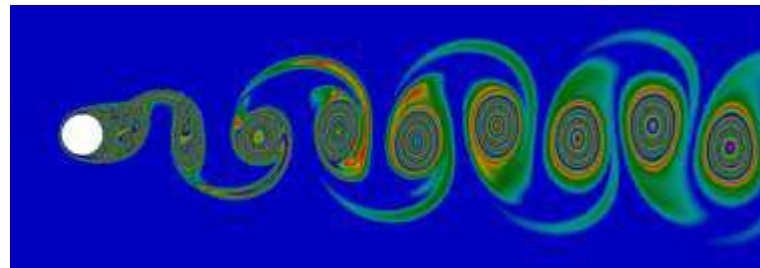
Aplikace – sítě(pevnostní výpočty)



Numerické metody

Aplikace - flutter

- Nestabilita objevující se u elastických těles vystavených aerodynamickým silám
- Dochází k resonanci – frekvence odtrhujících se vírů je blízká vlastní frekvenci tělesa
- Týká se staveb, letadel, ...



Numerické metody

Flutter - video

